KÆNGURUEN 2024

International matematikkonkurrence

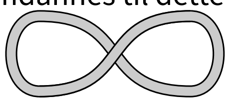
for 8. og 9. klassetrin i Danmark 60 minutter

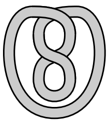
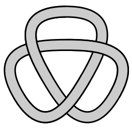
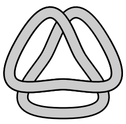
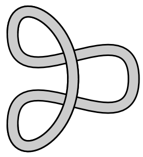
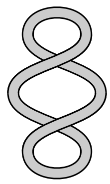
Navn og klasse

DEL 1 3 point pr. opgave Hjælpemidler: papir og blyant

Opgaverne **skal løses individuelt**, hvis klassen deltager i **Kænguruen**.

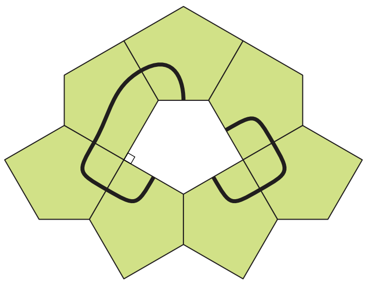
1 Hvilket af båndene kan ikke omdannes til dette uden at skære? 69%



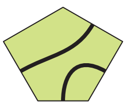
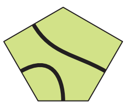
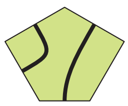
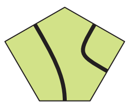
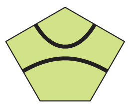
A  B  C  D  E 

Løsning: B er formet så de 2 ringe skal passere gennem hinanden og det er umuligt at omdanne uden at skære i båndet.

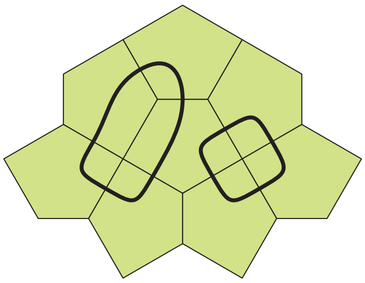
2 En figur er lavet af femkantede fliser, der har samme størrelse. 64%



Hvilken flise kan placeres i hulrummet for at danne to lukkede kurver?

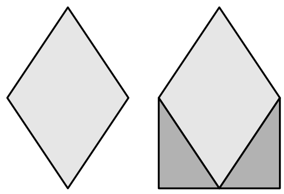
A  B  C  D  E 

Løsning: Alle fliserne er roteret 180°. Ingen anden rotation kan få en flise til at passe, da femkanten har præcis to rette vinkler.



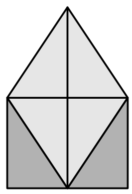
3 Den første figur viser en rombe. 63%

Området af den første figur er øget ved at tilføje to retvinklede trekanter, som vist.
Med hvor mange procent er området blevet forøget?

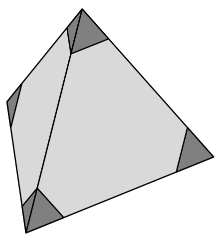


(A) 20% (B) 25% (C) 30% (D) 40% (E) 50%

Løsning: Den første figur kan inddeles i 4 rette trekanter med samme areal. Den forøgede figur har 6 af disse trekanter, så forholdet er $6/4$, hvilket er $3/2 = 1.5$. Området er altså forøget med 50%.



4 Julio skærer de fire hjørner af en regulær tetraeder, som vist. 65%



Hvor mange hjørner har figuren nu?

(A) 8 (B) 9 (C) 11 (D) 12 (E) 15

Løsning: Et tetraede har 4 hjørner. 3 sider mødes i hvert hjørne. Hver beskæring giver derfor 3 nye hjørner. Hvis alle 4 "gamle" hjørner skæres af, så bliver $4 \times 3 = 12$ nye hjørner skabt.

5 Ria har tre brikker med 1, 5 og 11, som vist. 33%

1 5 11

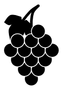
Hun vil placere dem ved siden af hinanden for at danne et firecifret tal.

Hvor mange forskellige firecifrede tal kan hun lave?

(A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 9

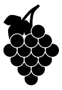
Løsning: Hun kan danne 1511, 1115, 5111 and 1151. Bemærk at man normalt kan danne $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ muligheder, men når 1 og 11 står ved siden af hinanden og deres rækkefølge ikke ændrer tallet, så mister du 2 muligheder.

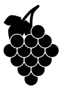
6 87%

En frugtskål indeholder 5 slags frugt: , , ,  og .

Al kan lide .

Bok kan lide , ,  og .

Cam kan lide , ,  og .

Don kan lide ,  og .

Eva kan lide  og .
Frugten deles så alle får et stykke frugt, som de kan lide. Alle får forskellige frugter.

Hvem får ?

(A) Al (B) Bok (C) Cam (D) Don (E) Eva

Løsning: Hvis alle skal have det frugt som de kan lide, så får Al æble og Eva kirsebær.

	Apples	Grapes	Cherry	Strawberry	Banana
Al	+				
Bok	+		+	+	+
Cam		+	+	+	+
Don	+	+	+		
Eva	+		+		

7 Vægtbegrænsningen for en elevator siger, at den enten kan bære 12 voksne eller 20 børn. 47%

Hvad er det største antal børn, der kan køre med elevatoren sammen med ni voksne, når man overholder vægtbegrænsningen?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 8

Løsning: Vi starter med at finde ud af, hvor mange børn der kan være i en elevator i stedet for $12 - 9 = 3$ voksne. Hvis der kan være 12 voksne i stedet for 20 børn, så kan der i stedet for 4 gange færre voksne være 4 gange færre børn $20 : 4 = 5$.

8 Fire forskellige positive hele tal er placeret i et gitter. 26%

Produktet af tallene i hver række og i hver kolonne er vist i diagrammet.

		6
		8
4	12	

Hvad er summen af de fire hele tal?

(A) 10 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

Løsning: I den øverste række kan vi enten have 2 og 3 eller 1 og 6. Hvis vi satte 2 øverst til venstre, så ville vi være nødt til at også at sætte 2 i den nederste række til venstre, så det er ikke muligt. Hvis vi sætter 3 eller 6 i den øverste række til venstre, så giver det ikke et helt tal i den nederste række til venstre. Derfor må vi sætte 1 i den øverste række til venstre. Herefter kan vi fylde diagrammet:

1	6	6
4	2	8
4	12	

DEL 2 4 point pr. opgave

9 Længden af denne række indkøbsvogne er 108 cm.
Længden af en række med ti indkøbsvogne er 168 cm. 28%

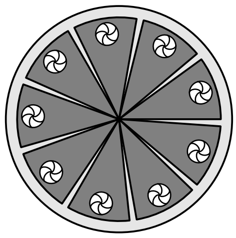
Hvad er længden af en enkelt indkøbsvogn?

(A) 60 cm (B) 68 cm (C) 78 cm (D) 88 cm (E) 90 cm

Løsning: Forskellen i længden af 4 og 10 vogne er $60\,\mathrm{cm}$. Hvis vi lægger $10 - 4 = 6$ vogne til, så lægger vi 60 cm til. Så en ekstra vogn vil øge længden med $60\,\mathrm{cm} : 6 = 10\,\mathrm{cm}$. Det betyder at 4 vogne minus den ekstra længde af 3 vogne $= 108\,\mathrm{cm} - 3 \times 10\,\mathrm{cm} = 78\,\mathrm{cm}$. Så længden af én vogn er $78\,\mathrm{cm}$.
Alternativ løsning: Sæt længden af en vogn til $x\,\mathrm{cm}$ og sæt den venstre del af den første (fra venstre) vogn, som ikke er dækket af andre vogne til $y\,\mathrm{cm}$. Længden af 4 vogne består at 3 dele y af de første 3 vogne og længden x af den fjerde vogn. Dvs. $3y + x = 108$. For 10 vogne giver det $9y + x = 168$. Det betyder at $6y = 168 - 160 = 60$ og $y = 10\,\mathrm{cm}$. Længden af en vogn er $x = 108 - 3y = 78\,\mathrm{cm}$.

10 Karina bagte en kage og skar den i ti lige store stykker.
Hun spiste et stykke og lagde resten af stykkerne, som vist. 45%

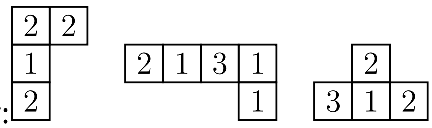
Hvad er størrelsen på vinklen mellem to stykker?



(A) 5° (B) 4° (C) 3° (D) 2° (E) 1°

Løsning: Vinklen på hvert stykke er $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$. der er 9 mellemrum.
Vinklen af hvert mellemrum er $\frac{36^\circ}{9} = 4^\circ$.

11 Werner kan lave et 4×4 kvadrat, hvor summen af tallene i alle fire rækker og alle fire kolonner er den samme, ud fra de tre viste stykker: 35%



og et ekstra stykke.

Hvilket af stykkerne mangler for at færdiggøre kvadratet?

(A) $\boxed{1}\boxed{1}\boxed{3}$ (B) $\boxed{2}\boxed{1}\boxed{0}$ (C) $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}$ (D) $\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}$ (E) $\boxed{2}\boxed{2}\boxed{3}$

Løsning: Et af stykkerne har en række med 4 tal med summen $2 + 1 + 3 + 1 = 7$. Derfor må summen af alle tallene i hele kvadratet være $4 \times 7 = 28$. Summen af tallene på de 3 stykker er 7, 8 og 8 og derfor mangler vi et stykke med summen $28 - 7 - 8 - 8 = 5$. I de mulige svar er A det eneste stykke med summen 5.

2	1	3	1
2	2	2	1
1	3	1	2
2	1	1	3

12 Pingvinen Paula fisker hver dag og bringer altid tolv fisk med hjem til sine to unger. Hver dag giver hun den første unge, som hun ser, syv fisk, og den anden unge får fem fisk. I de seneste dage har den ene unge fået 44 fisk. 31%

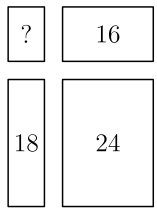
Hvor mange fisk har den anden unge fået?

A 34 B 40 C 46 D 52 E 58

løsning: Den eneste mulighed for at en unge kan have spist i alt 44 fisk er at have spist 5 fisk 6 gange og 7 fisk 2 gange. Derfor må den have spist fisk i 8 dage. På 8 dage bragte Paula $8 \times 12 = 96$ fisk. Den anden unge må derfor have spist $96 - 44 = 52$ fisk.

13 Gerard skærer et stort rektangel op i fire mindre rektangler. Omkredsen af tre af rektanglerne er 16, 18 og 24, som vist. 30%

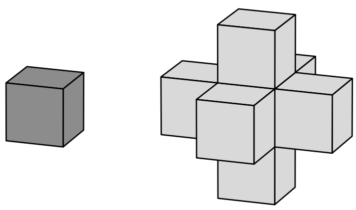
Hvad er omkredsen af det sidste lille rektangel?



A 8 B 10 C 12 D 14 E 16

I diagrammet kan man se omkredsen af rektanglet i det øverste venstre hjørne og omkredsen af det nederste højre rektangel er lige så stor som omkredsen af det store rektangel. Det samme kan siges om rektanglet nederst til venstre og rektanglet øverst til højre. Derfor er $24 + ? = 18 + 16$ og dermed er $? = 10$.

14 Johan havde en masse ens kuber. Han lavede figuren til højre ved at tage en enkelt kube og derefter lime en kube fast på alle dens sider. Han ønsker at lave figuren større på samme måde. 32%



Hvor mange ekstra kuber skal han bruge for at lave den næste figur?

A 18 B 16 C 14 D 12 E 10

Løsning: Der er 30 flader, der skal dækkes. Når man sætter en kube ind i et af "hjørnerne" på den inderste kube af strukturen, så dækker den 2 (indre) flader på samme tid. Der er 12 kanter på den inderste kube, derfor dækker 12 kuber de 24 indre flader. For at dække de yderste flader skal der bruges 6 kuber mere, i alt 18 kuber.

15 En kænguru hopper op ad et bjerg og hopper så tilbage ned ad samme rute. Den hopper tre gange så langt, i et hop, når den hopper nedad sammenlignet med opad. Når den hopper op ad bakke, hopper den 1 meter pr. hop. I alt laver kænguruen 2024 hop. 29%

Hvad er den samlede afstand, i meter, som kænguruen hopper?

(A) 506 (B) 1012 (C) 2024 (D) 3036 (E) 4048

Løsning: Lad u betegne antallet af hop opad bjerget og d antallet af hop nedad. Siden kænguruen hopper 3 gange så langt nedad som opad, så vil den hoppe 3 gange så mange hop opad som den hopper nedad. Derfor er $u = 3d$. Siden vi for at vide at $u + d = 2024$, så er $3d + d = 2024$ som har løsningen $d = 506$. Derfor er den totale distance som kænguruen hopper $506 \times 3 + 3 \times 506 \times 1 = 3036$.

16 Ria vil færdiggøre den viste opgave så hver række og kolonne indeholder tallet 1, 2, 3 og 4 præcis én gang. Hun vil placere tallene så “større end” og “mindre end’ ’ ($>$ og $<$) giver en korrekt sammenhæng mellem de to værdier på hver side af tegnet. Tegnene virker i alle retninger, som vist i eksemplet: 31%

$$\begin{array}{ccc} 1 & < & 2 \\ \wedge & & \vee \\ 2 & > & 1 \end{array}$$

Hvilket tal skal hun skrive i den grå cirkel?

$$\begin{array}{ccccccc} \bigcirc & & \bigcirc & & \bigcirc & & \bigcirc \\ & & & & \wedge & & \\ \bigcirc & & \bigcirc & < & 3 & > & \bigcirc \\ & & & & \vee & & \vee \\ \bigcirc & & \bigcirc & & \bigcirc & & \bigcirc \\ \\ \bullet & & \bigcirc & & \bigcirc & & \bigcirc \end{array}$$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 2 eller 3

Løsning:

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & & 3 & & 1 & & 4 \\ & & & & \wedge & & \\ 4 & & 1 & < & 3 & > & 2 \\ & & & & \vee & & \vee \\ 3 & & 4 & & 2 & & 1 \\ \\ 1 & & 2 & & 4 & & 3 \end{array}$$

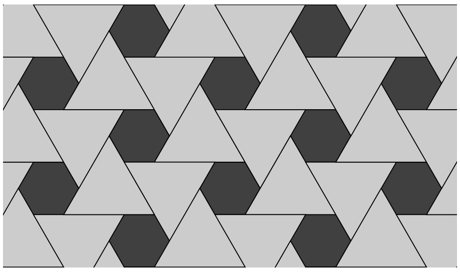
17 Dan vil gerne klippe et reb over i 12 lige store stykker. Han markerer, hvor der skal klippes. Muhammad vil gerne klippe det samme reb over i 16 lige store stykker. Han markerer, hvor der skal klippes.
Maya klipper rebet over alle de steder, hvor der er markeret. 18%

Hvor mange stykker får Maya?

(A) 24 (B) 25 (C) 27 (D) 28 (E) 29

Løsning: Dan markerede alle tolvte-dele på rebet (11 mærker). Muhammad markerede alle sekstende-dele på rebet (15 mærker). De havde 3 fælles mærker: $3/12 = 4/16$, $6/12 = 8/16$, $9/12 = 12/16$. I alt havde Maya $11 + 15 - 3 = 23$ mærker at klippe på rebet.

18 Teri planlægger at lave et stort firkantet mosaikgulv i et mønster med sekskantede og trekantede fliser, som vist på tegningen. 41%



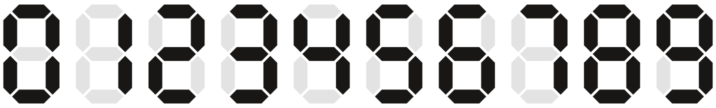
Hun regner med, at hun skal bruge 3000 sekskantede fliser til hele gulvet.

Hvor mange trekantede fliser vil hun så have brug for?

(A) 1000 (B) 1500 (C) 3000 (D) 6000 (E) 9000

Løsning: Hver hexagon er omgivet af 6 trekanter og hver trekant har kontakt med 3 hexagoner. Der er $6/3 = 2$ trekanter per hexagon, så anslået 6000 i alt.

19 Cifrene 0 - 9 kan skrives med vandrette og lodrette linjestykker, som vist. 31%



Greg vælger tre forskellige cifre. I alt har hans cifre 5 vandrette og 10 lodrette linjestykker.

Hvad er summen af hans tre cifre?

(A) 9 (B) 10 (C) 14 (D) 18 (E) 19

Løsning: Hvert ciffer har 0, 1, 2 eller 3 vandrette linjestykker, så totalen 5 kan fåes ved
$5 = 2+2+1$ eller
$5 = 3+1+1$ eller
$5 = 3+2+0$.
Men den første mulighed er ikke mulig, da kun 0 har 2 vandrette linjestykker. Den anden mulighed er heller ikke mulig, da kun 4 og 7 har 1 vandret linjestykke og cifrene 4 og 7 har samlet 3+2=5 lodrette linjestykker, hvilket betyder at det tredje ciffer skulle have 5 lodrette linjestykker og maximum er 4. Derfor må der være 3, 2 og 0 vandrette linjestykker i cifrene. Kun cifret 1 har ingen vandrette linjestykker og kun cifret 0 har 2 vandrette linjestykker og tilsammen har de 6 lodrette linjestykker. Derfor har det sidste ciffer 3 vandrette og 4 lodrette linjestykker og må være cifret 8. Dvs. cifrenes sum er $8+0+1=9$.

20 Der sidder 50 elever i en cirkel. De kaster en bold rundt i cirklen. 27%
De kaster bolden til den elev, der sidder 6 pladser længere væk mod uret.
Freda fanger bolden 100 gange.

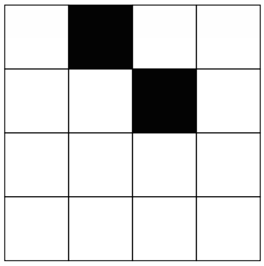
Hvor mange elever får aldrig bolden?

(A) 0 (B) 8 (C) 10 (D) 25 (E) 40

Løsning: For at en elev kan få bolden igen efter at have kastet den, så må bolden passere et multiplum af 50 elever. Da bolden gribes af hver sjette elev, så må den også passere et multiplum af 6 elever. Derfor må bolden passere 150 (fællesnævner for 50 og 6) elever før den første elev får bolden igen. Før dette sker, er bolden blevet kastet til 150/6=25 elever og vi kan være sikker på at ikke 2 elever er den samme, fordi det ville kræve mindst 150 kast. Når den første elev modtager bolden igen og skal kaste den for anden gang, så gentager kaste-mønsteret sig selv og de samme 25 elever vil modtage bolden igen, hvilket betyder at de andre 25 elever aldrig vil modtage bolden.

21 Tarek ønsker at farve to firkanter mere på tegningen, så mønsteret har netop en symmetriakse.

På hvor mange forskellige måder kan han tegne sit mønster?



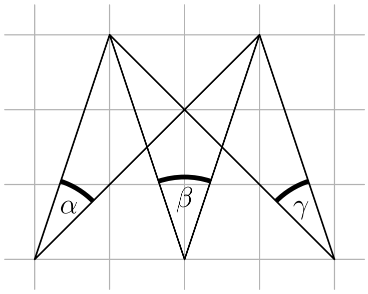
11%

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Løsning: Symmetriaksen kan være vandret, lodret, diagonal fra øverst til venstre til nederst til højre eller fra nederst til venstre til øverst til højre. I de første 3 muligheder kan Tarek kun farve 2 firkanter mere på én måde for at lave symmetri. I den sidste mulighed er der 3 måder han kan lave symmetri. Derfor kan Tarek farve mønsteret på $1+1+1+3=6$ forskellige måder.

22 Tre vinkler α, β and γ er markeret på millimeterpapir, som vist.

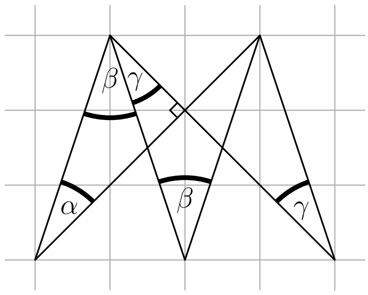
Hvad er værdien af $\alpha+\beta+\gamma$?



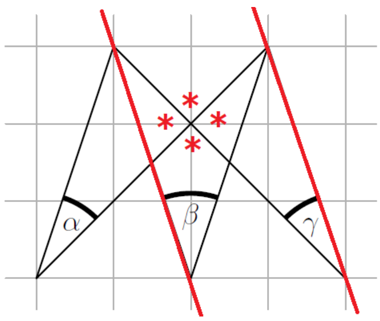
34%

(A) 60° (B) 70° (C) 75° (D) 90° (E) 120°

Løsning: Diagrammet viser en trekant med vinkler der er lig med α, $\beta+\gamma$ og 90°.
Derfor er $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$.

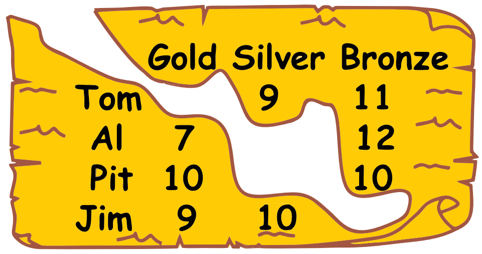


Udvidet løsning: Diagonaler i kvadratnettet er 45° hver og 90° tilsammen. De 4 vinkler mærket med * er 90° hver, da de er nabovinkler og/eller topvinkler. De to røde linjer er parallelle og overskæres af en 3. linje. Derfor er ensliggende vinkler lige store.
I en trekant er der α, $\beta+\gamma$ og en 90°'s vinkel, så derfor må de også være 90° tilsammen.



23 Kaptajn Flint bad fire af sine pirater om at skrive på et stykke papir, hvor mange guld-, sølv- og bronzemønter, der var i skattekisten. 15%

Deres svar er vist på tegningen, men desværre er en del af papiret beskadiget. Kun én af de fire pirater talte sandt. De tre andre løj i alle deres svar.
Det samlede antal mønter er 30.



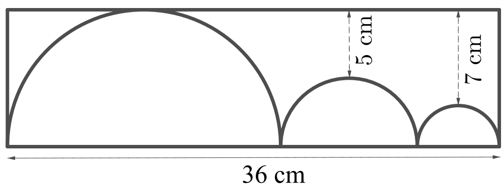
Hvem talte sandt?

(A) Tom (B) Al (C) Pit (D) Jim (E) vi kan ikke være sikre

Løsning: Lad os sige at Tom taler sandt. Siden det samlede antal mønter er 30, så ville hans svar om guldmønterne være $30-9-11=10$. Men det er det samme som Pit svarer om guldmønterne og siden de 3 pirater, der lyver, lyver i alle deres svar, så er det ikke muligt. Lad os nu sige at Pit taler sandt. Pits svar om sølvmønterne ville være $30-10-10=10$, men det er det samme som Jim svarer, så det er heller ikke muligt. Hvad så hvis Jim taler sandt. Jims svar for bronze ville være 11, men det er det samme svar som Tom og er derfor heller ikke muligt. Siden hverken Tom, Pit eller Jim taler sandt, så kan kun Al have talt sandt. Als manglende svar for sølvmønter ville være 11 og det kan ses at ingen af hans svar matcher nogen af de andre piraters svar.

24 Tegningen viser tre halvcirkler i et rektangel. 47%

De to halvcirkler tangerer rektanglets korte sider.
Den midterste halvcirkel tangerer de to andre halvcirkler.
Afstanden fra de to mindste halvcirkler til rektanglets side er vist på skitsen.



Hvad er omkredsen af rektanglet i cm?

(A) 82 (B) 92 (C) 96 (D) 108 (E) 120

Løsning: Lad $h\text{cm}$ være længden af den ukendte side i rektanglet. Derfor er radierne i cm i de 3 halvcirkler h, $h-5$ and $h-7$. Hvis vi ser på den lange side i rektanglet har vi $2(h+h-5+h-7)=36$. Her er løsningen $h=10$. Derfor er omkredsen i rektanglet $2\cdot(36+10)=92$ cm.